Apéndice I
Vectores

Vectores

Los vectores son segmentos orientados. Sus elementos son:
• Punto de aplicación.
• Intensidad o módulo (siempre un número positivo)
• Dirección (orientación en el espacio de la recta que lo contiene)
• Sentido (uno de los dos posibles sobre la recta, indicado por una punta de flecha)

Se representan gráficamente mediante una flecha cuya dirección y sentido son los del vector y cuya longitud, en una escala adecuada, es proporcional al módulo o intensidad del vector.

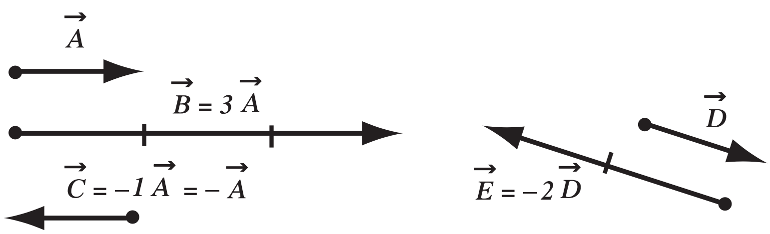
Indicaremos que una magnitud es vectorial colocando sobre su notación una pequeña flecha arriba ($\vec{A}$). Para indicar el módulo del vector utilizaremos esa misma notación entre barras ($|\vec{A}|$).

Las operaciones (suma, resta, multiplicación) entre vectores responden a reglas que no son las mismas que entre números.

La médica aplica al carro una fuerza $\vec{F}$ de dirección horizontal, sentido hacia la izquierda y de módulo $|\vec{F}| = 4$ kgf .
Escala: 2 kgf/cm

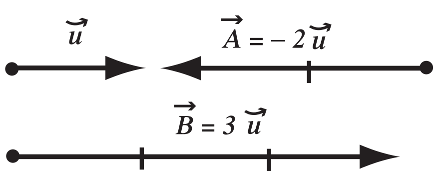
Multiplicación de un vector por un número

Multiplicar un vector por un número es obtener un vector de igual dirección, de módulo igual al valor absoluto del número por la intensidad del vector y cuyo sentido es el mismo u opuesto al del vector dado según que el número sea positivo o negativo.



Observemos que si se multiplica un vector por el número –1 se obtiene el vector opuesto.

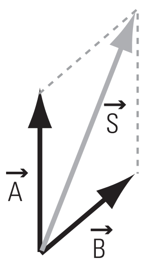
Se denomina **versor** a un vector de módulo uno. Si, dada una dirección, tomamos sobre ella un versor según una de las dos orientaciones posibles (versor $\breve{u}$), todo vector sobre esa recta se podrá expresar como un número por el versor.



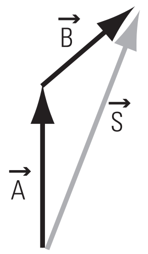
Suma de vectores:

Si compramos un kilo de uva y dos kilos de manzanas, habremos comprado 3 kilos de fruta. Si la clase dura tres horas y se ocupa 1 hora en la explicación teórica, el intervalo es de 15 minutos quedan 1 hora 45 minutos para la parte práctica. De estos ejemplos es claro que para sumar o restar magnitudes escalares (como la masa y el tiempo) basta con sumar o restar los números de las cantidades correspondientes.

Sin embargo no sucede lo mismo con las magnitudes vectoriales. Si al atravesar un río de corriente rápida sujetamos el timón transversalmente a la corriente e imprimimos a la lancha una velocidad de 3 m/s, pero la velocidad de la corriente de agua es 4 m/s, la lancha, vista desde tierra se mueve oblicuamente, ¿cuál es módulo de su velocidad?, ¿en qué dirección exacta se mueve? Es claro que esta información no se obtiene sumando algebraicamente los números. Para responder a estar preguntas debemos aprender a sumar vectores. Existen dos métodos básicos equivalentes: el **método gráfico** que se basa en construcciones geométricas en escala y el **método analítico** que trabaja con las proyecciones de los vectores sobre un par de ejes perpendiculares.



Regla del paralelogramo



Método de la poligonal

Método gráfico para la suma de vectores

Para sumar dos vectores gráficamente se aplica la llamada **regla del paralelogramo**: el vector suma $\vec{S}$ es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores dados. Otra manera de obtener gráficamente el vector suma, que resulta de mucha utilidad para sumar más de dos vectores, es mediante el **método de la poligonal** que consiste en poner los vectores a sumar uno a continuación de otro: el vector suma es el vector que une el origen del primer vector con el extremo del último.

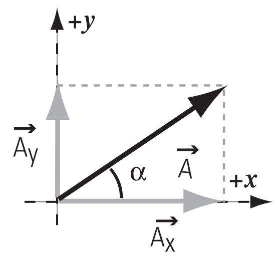
Descomposición de vectores

Para que el tratamiento sea más sencillo, trabajaremos con vectores en el plano.

Un vector se puede expresar siempre como la suma de dos vectores perpendiculares entre sí. En la figura el vector $\vec{A}$ se ha descompuesto según las direcciones de los ejes x e y.

El vector $\vec{A}$ es la suma vectorial de los vectores $\vec{A_x}$ y $\vec{A_y}$.

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



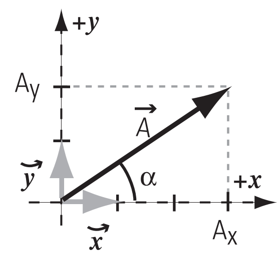
Observamos que el vector $\vec{A}$ es la diagonal del paralelogramo (rectángulo) de lados A_x y A_y.

Tomando versores $\breve{x}$ e $\breve{y}$ orientados según los sentidos arbitrariamente elegidos como positivos de los ejes x e y , podemos escribir:

$$\vec{A} = A_x\ \breve{x} + A_y\ \breve{y}$$

Los números A_x y A_y se denominan componentes del vector. Su signo puede ser positivo o negativo según que el sentido de los vectores $\vec{A_x}$ y $\vec{A_y}$ coincida o no con el de los versores correspondientes. En este caso:

$$\vec{A} = 3\ \breve{x} + 2\ \breve{y}$$

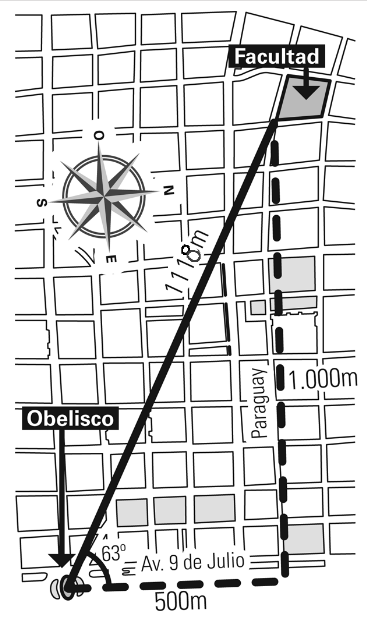


Las componentes del vector $\vec{A}$ están relacionadas con su módulo y el ángulo que éste forma con uno de los ejes (convencionalmente se elige relacionarlo con el eje x.). Los vectores $\vec{A}$, $\vec{Ax}$ y $\vec{Ay}$ forman un triángulo rectángulo, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras puede determinarse el módulo del vector y, con funciones trigonométricas, hallarse el ángulo que forma con el eje x. Conocidas las componentes queda determinado en qué cuadrante está el vector y utilizando la función arcotangente y trabajando con los módulos de las componentes se puede ubicar el ángulo agudo entre el vector y la dirección horizontal.

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3{,}6 \qquad \alpha = arctg\frac{|A_y|}{|A_x|} = arctg\frac{2}{3} = 33{,}7°$$

Si, inversamente, se conoce el módulo del vector $\vec{A}$ y el ángulo α, se pueden calcular sus componentes como:

$$A_x = \left|\vec{A}\right| \cos\alpha = 3{,}6 \cdot \cos 33{,}7° = 3 \qquad A_y = \left|\vec{A}\right| sen\alpha = 3{,}6 \cdot sen 33{,}7° = 2$$



Posición de la Facultad de Medicina $\vec{r}$ en un sistema de coordenadas con origen el Obelisco, eje x en dirección sur –norte y eje y en dirección este-oeste.

$$\vec{r} = 500\ m\ \breve{x} + 1000\ m\ \breve{y}$$

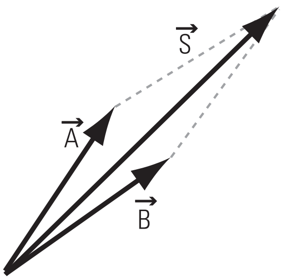
$$|\vec{r}| = \sqrt{(500\ m)^2 + (1000\ m)^2} =$$

$$|\vec{r}| = 1118\ m$$

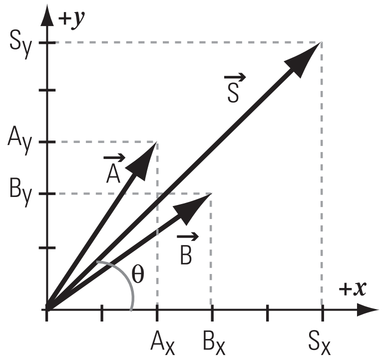
$$\alpha = arctg\frac{1000m}{500m} = 63{,}4°$$

Suma analítica de vectores

Consideremos dos vectores cualesquiera con origen en el mismo punto. Si se toma un par de ejes cartesianos ortogonales arbitrarios y se descomponen ambos vectores según estos ejes, cada vector se expresará en función de sus componentes. La componente x del vector suma se calcula, entonces, como la suma de las componentes x de los vectores dados. Un cálculo similar permite calcular la componente y del vector suma. El vector suma quedará de este modo expresado en componentes ortogonales y si se lo necesita, es posible calcular su módulo y su dirección utilizando el teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas.



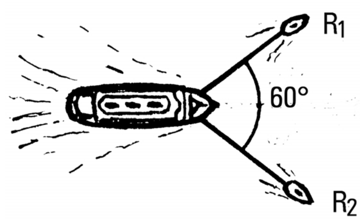
$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{S} = S_x\breve{x} + S_y\breve{y}$$
donde
$$S_x = A_x + B_x$$
$$S_y = A_y + B_y$$



$$\vec{S} = (2\breve{x} + 3\breve{y}) + (3\breve{x} + 2\breve{y})$$
$$\vec{S} = 5\breve{x} + 5\breve{y}$$
donde
$$S_x = 2 + 3$$
$$S_y = 3 + 2$$
$$|\vec{S}| = \sqrt{S_x^{\,2} + S_y^{\,2}} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7{,}07$$
$$\theta = arctg\frac{S_y}{S_x} = 45°$$

Ejemplo

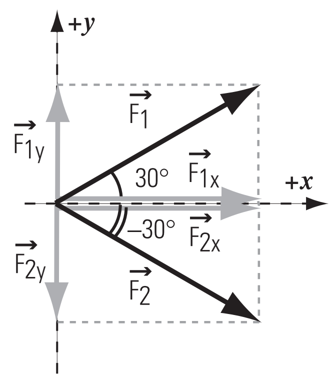
Dos remolques tiran de un barcaza con fuerzas de igual módulo de valor 500 kgf en la forma indicada en la figura. El ángulo entre las fuerzas es 60º. ¿Qué fuerza total ejercen sobre el barco?



Si bien cualquier par de ejes ortogonales permitirá resolver el problema, dada la simetría de la situación conviene tomar el eje x según la bisectriz de ángulo que forman las fuerzas y el eje y perpendicular a éste.

En este sistema de coordenadas las componentes según x de las dos fuerzas son iguales en módulo y sentido. Las componentes en y son también iguales en módulo pero tienen sentidos opuestos con lo cual su suma da cero (se equilibran). Expresado formalmente:

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$F_{total\,x} = F_{1x} + F_{2x} = \left|\vec{F}_1\right| \cos 30^{\text{o}} + \left|\vec{F}_2\right| \cos(-30^{\text{o}}) =$$
$$F_{total\,x} = 500kgf.0{,}866 + 500kgf.0{,}866 = 866kgf$$
$$F_{total\,y} = F_{1y} + F_{2_y} = \left|\vec{F}_1\right| sen30^{\text{o}} + \left|\vec{F}_2\right| sen(-30^{\text{o}}) = 250kgf - 250kgf = 0$$
$$\vec{F}_{total} = 866\ kgf\ \breve{x}$$



Si ahora uno de los remolques tirara con una fuerza de 800 kgf, ¿la fuerza total sobre la barcaza estaría en la dirección del eje x? ¿Cuánto valdría?

Dejamos para el alumno la demostración de que en ese caso la fuerza total tiene un módulo de 1135,7 kgf y está en una dirección que forma con el eje x un ángulo de aproximadamente 7,59º, medido en sentido horario.

El procedimiento de sumar analíticamente dos vectores se puede extender de modo sencillo a un número n de vectores:

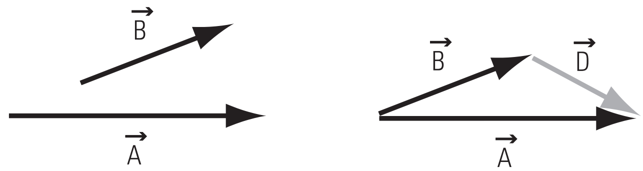
$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

$$\vec{S} = S_x\breve{x} + S_y\breve{y} \quad \text{donde} \begin{cases} S_x = \sum_{i=1}^{n} F_x \\ S_y = \sum_{i=1}^{n} F_y \end{cases}$$

Resta o diferencia de vectores

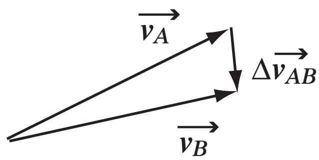
Restarle a un vector $\vec{A}$ otro vector $\vec{B}$ ($\vec{A} - \vec{B}$) es encontrar el vector $\vec{D}$ que hay que sumarle a $\vec{B}$ para obtener $\vec{A}$.

Gráficamente, por aplicación del método de la poligonal, si se llevan los vectores a partir de un mismo origen, el vector resta $\vec{D}$ es el vector que une el extremo de $\vec{B}$ con el de $\vec{A}$.



Para la resta analítica bastará expresar a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en componentes según un par de ejes y luego restar (en vez de sumar) las componentes según cada eje.

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} \quad \text{porque} \quad \vec{A} = \vec{D} + \vec{B}$$



$\Delta\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$
porque
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \Delta\vec{v}_{AB}$

Para determinar la variación de la velocidad que experimenta un móvil entre dos instantes es necesario restar las velocidades que tiene en esos instantes.

Producto escalar

Hasta aquí hemos considerado la suma y resta de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar. Dos clases de producto entre vectores son utilizados comunmente en la Física: el **producto escalar**, que da por resultado un escalar (un número), y el **producto vectorial**, que da por resultado otro vector. Aquí sólo definiremos el producto escalar que denotaremos con un punto grueso: •.

Consideremos dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Llamamos producto escalar de $\vec{A}$ por $\vec{B}$, y lo denotamos $\vec{A}\bullet\vec{B}$, al escalar que resulta de multiplicar el módulo de uno de los vectores por la componente del otro vector en la dirección del primero:. En símbolos:

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = A_B \cdot \left|\vec{B}\right|$$

Donde A_B es la componente de $\vec{A}$ .en la dirección de $\vec{B}$; el signo del producto escalar es positivo si el vector proyección $\vec{A}_B$ y el vector $\vec{B}$ tienen igual sentido y es negativo si el sentido es contrario. O bien:

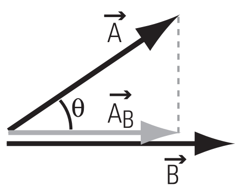
$$\vec{A}\bullet\vec{B} = B_A \cdot \left|\vec{A}\right|$$

con la misma consideración en cuanto al signo

O sea:

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \cos\theta \cdot \left|\vec{B}\right| \quad \text{ó} \quad \vec{A}\bullet\vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \cos\theta$$

Donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$



En este caso el producto escalar es positivo porque el vector proyección $\vec{A}_B$ y el vector $\vec{B}$ tienen igual sentido.

Así, por ejemplo, si los vectores son perpendiculares:

$$\theta = 90° \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{A}\bullet\vec{B} = 0$$

Observe que en ese caso la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ es nula.

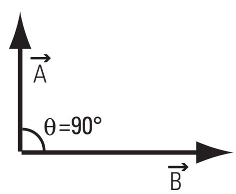
Si los vectores coinciden en dirección y sentido:

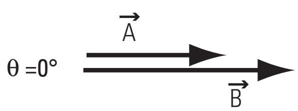
$$\theta = 0° \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \vec{A}\bullet\vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|$$

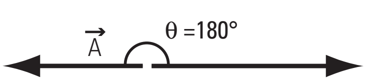
Observe que en ese caso la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ es tiene el mismo módulo que $\vec{A}$.

Si los vectores coinciden en dirección pero tienen sentidos opuestos (son antiparalelos):

$$\theta = 180° \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \vec{A}\bullet\vec{B} = -\left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|$$







El producto escalar tendrá aplicación, en nuestro curso, en el tratamiento del trabajo de una fuerza. El producto vectorial, en cambio, sirve para calcular el momento de una fuerza; es decir, su efecto de torsión.