Unidad 0

Repaso Análisis Matemático

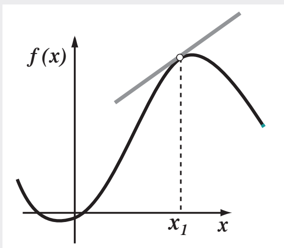
Derivadas e integrales

La *derivada* y la *integral* son dos conceptos centrales del análisis matemático, que deben saber manejar en este curso. Ambos tienen muchas aplicaciones en la Física, Química, Biología, Ingeniería, Economía, Sociología, entre otras. En el ejercicio **2.6** se explora cómo un concepto es el inverso del otro.

La *derivada* se aplica en casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación.

Su interpretación gráfica es la pendiente de la recta tangente.

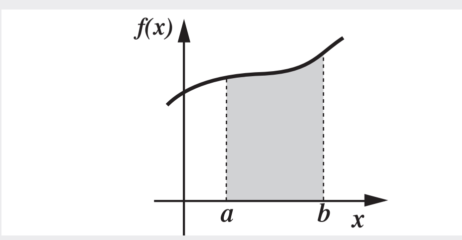
Así, en el gráfico la pendiente de la línea gris corresponde a la derivada de $f(x)$ en el punto x_1.



La derivada de la función $f(x)$ se denota como $f\,'(x)$ o como $df(x)/dx$. En el caso particular que la función dependa del tiempo, $g(t)$, es común utilizar la notación $\dot{g}$ para la derivada.

Los primeros ejemplos que veremos corresponden al estudio del movimiento, la velocidad es la derivada de la función que representa la posición de un objeto con respecto al tiempo y la aceleración es la derivada de la función que representa la velocidad del mismo con repecto al tiempo.

La *integral* se aplica al cálculo de áreas y volúmenes, y su interpretación gráfica es el área sombreada debajo de una curva.



Así en el gráfico la integral definida de $f(x)$ entre a y b corresponde al área sombreada y se denota

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

2.1- Calcular por definición las siguientes derivadas:

a) $f(x) = 3x + 4$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = 1/x$

2.2- Dada la ecuación $f(x) = ax^2+bx+c$ encontrar la posición del vértice.

2.3- Calcular las derivadas que siguen $f'(x)= df(x)/dx$, y luego especificar el valor para $x_0 = 0{,}2$.

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = 2$

c) $f(x) = 2x^2 +3$ d) $f(x) = 10x^2 - x+2$

e) $f(x) = 2/x$ f) $f(x) = \ln(x)$

g) $f(x) = e^x$ h) $f(x) = e^{-x}$

i) $f(x) = \operatorname{sen}(x/4) + \cos(x/\pi)$

j) $f(x) = \tan(x)$

2.4- Para cada una de las siguientes funciones determinar, si existen, máximos y mínimos relativos y/o absolutos, en el conjunto [a,b].

a) $f(x) = x^3 + x$, en $[-1, 2]$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, en $[-2, 2]$

c) $f(x) = x/(x+1)$, en R

d) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$, en $[0, \pi/2]$

2.5- Calcular los puntos en que la tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje x.

RTA: A (3; –22) ; B(–1; 10).

2.6- Dada la ecuación $x(t) = 3t^2 - 2t - 1$, dónde x se expresa en metros y t en segundos.

a) Calcular la derivada de $x(t)$, $x'(t)$, en los puntos $t = 0$ s, 1 s, 2 s y 3 s. ¿Qué unidades tiene $x'(t)$?

b) Graficar en un mismo gráfico $x(t)$ y sus derivadas evaluadas en los puntos del item a).

c) Calcular la derivada segunda de $x(t)$, $x''(t)$, en los puntos $t = 0$ s, 1 s, 2 s y 3 s. ¿Qué unidades tiene x”(t)?

d) Graficar en un mismo gráfico $x'(t)$ y sus derivadas, $x''(t)$, evaluadas en el item c).

RTA: a) –2 m/s; 4 m/s; 10 m/s; 16 m/s;
b) De elaboración personal;
c) 6 m/s^2; d) De elaboración personal.

2.7- Dada la función
$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
a) Encontrar las raíces.
b) Calcular la derivada primera de $f(x)$, $f'(x)$, y evaluar para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.
c) Calcular la derivada segunda de $f(x)$, $f''(x)$, y evaluar para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.
d) Observar los gráficos, e interpretar geométricamente las distintas derivadas.

2.8- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^{2} \left(u^2 + 1\right) du$ b) $\int_{0}^{x} \operatorname{sen} u \, du$

c) $\int_{x}^{\pi} \cos u \, du$ d) $\int_{1}^{\infty} 1/u^2 \, du$

e) $\int_{x}^{0} u \operatorname{sen} u \, du$ f) $\int_{-2}^{x} \left(e^{-u} + 1\right) du$

2.9- Por inspección de los resultados obtenidos en el ejercicio **2.3**, calcular:

a) $\int_{0}^{x} 2 \, du$

b) $\int_{0}^{x} 1/u \, du$

c) $\int_{0}^{x} 4u \, du$

d) $\int_{0}^{\infty} 2/u^2 \, du$

e) $\int_{x}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{sen} u + \frac{1}{4} \cos u\right) du$

f) $\int_{0}^{x} u\left(e^{-u} - 1\right) du$

OPTATIVOS

2.10- ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico, de radio R = 2 m, si se está vaciando uniformemente a razón de 3000 litros por minuto?

RTA = – 750/π litros/(min.m^2) = –0,750/π m/min.

2.11- Se está llenando un globo de forma esférica con gas a razón de 50 cm^3/s. Calcular la velocidad a la que está aumentando el radio del globo, R, cuando su valor es R = 5 cm.

RTA = 1/(2 π) cm/s = 0,16 cm/s.

2.12- Una masa esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de 50 cm^3 por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide 15 cm?

RTA = –1/(18 π) cm/min = –0,0177 cm/min.

2.13- Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de un millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función, $f(t)$, que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 10^6 & \text{si } 0 < t < 2 \\ 10^6 \cdot e^{(t-2)} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcular la tasa de variación media de la población en los intervalos [0, 2] y [0, 4].

RTA: 0 y $1{,}59 \times 10^6$

b) Calcular la tasa de variación instantánea en $t = 4$.

RTA: $7{,}39 \times 10^6$

2.14- ¿Cómo varían las respuestas en el ejercicio anterior si la función, $f(t)$, que representa la población de la colonia con el tiempo es:
$f(t) = 5000 + 1000\, t^2 \quad t \geq 0$

RTA: a) 2000 y 4000;
b) 8000.